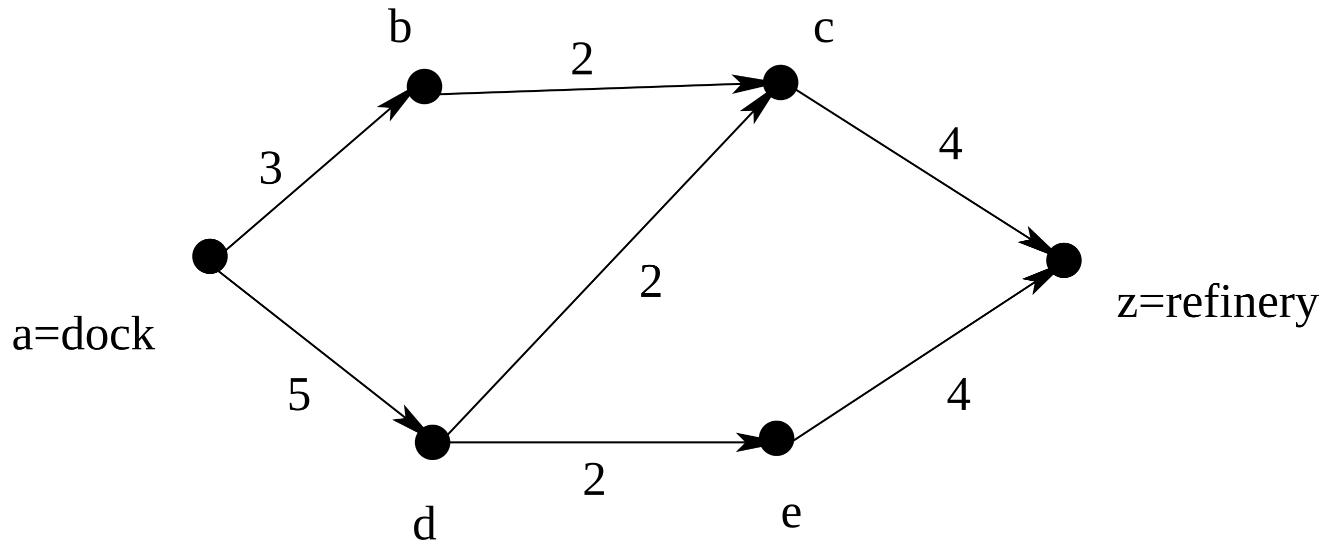
Bài toán dòng trên mạng (Network Flow Problem)

Ứng dụng

Bài toán dòng là cơ bản trong lý thuyết đồ thị và vận trù học (operations research)

➠ **Xét đồ thị trong hình vẽ mô tả mạng ống dẫn dầu.**



Mạng vận chuyển (transport network)

Một **mạng vận chuyển** là một đồ thị đơn G, có trọng số, và có hướng thõa:

- Có 1 đỉnh **nguồn** (không có cạnh vào)
- Có 1 đỉnh **đích** (không có cạnh ra)
- Trọng số $C_{ij} \geq 0$ gọi là **dung lượng** của cạnh (i, j).
- Đồ thị nền của G là liên thông.

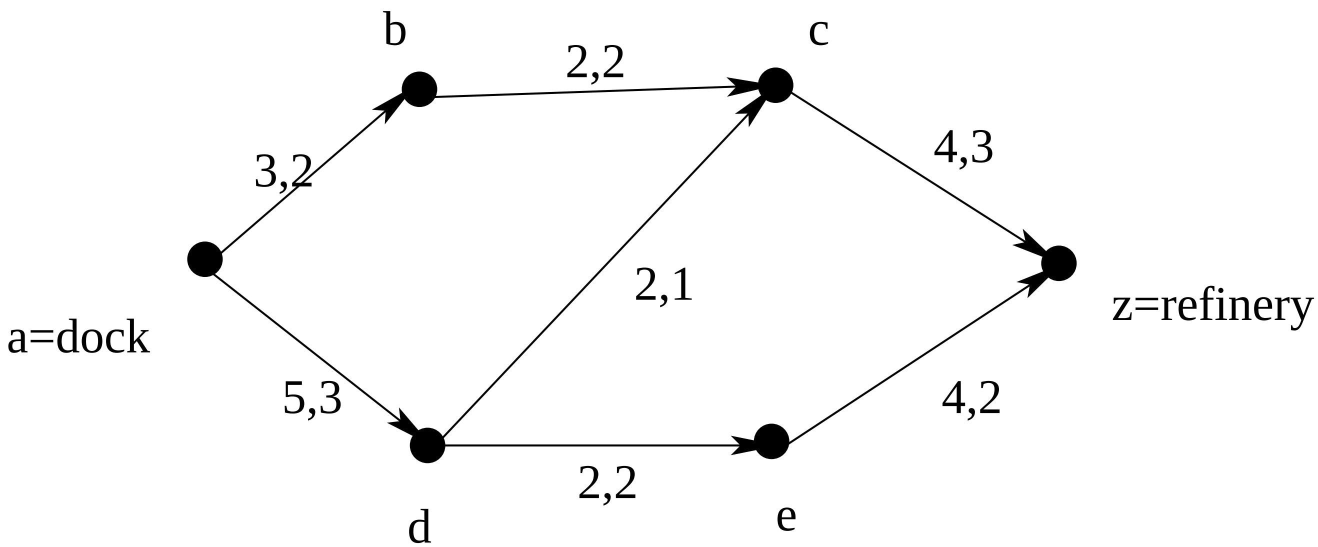
➠ Xét đồ thị trong hình vẽ mô tả mạng ống dẫn dầu.

Mạng vận chuyển (transport network)

Cho G là một mạng vận chuyển với dung lượng C_{ij}. Một dòng (flow) F trong G gán mỗi cạnh (i, j) một số nguyên dương F_{ij} sao cho:

- $F_{ij} \leq C_{ij}$
- **(bảo toàn dòng - conservation of flow)**

  $\Sigma_i F_{ij} = \Sigma_i F_{ji}$


b
c
2,2
3,2
4,3
2,1
a=dock
z=refinery
5,3
4,2
2,2
d
e

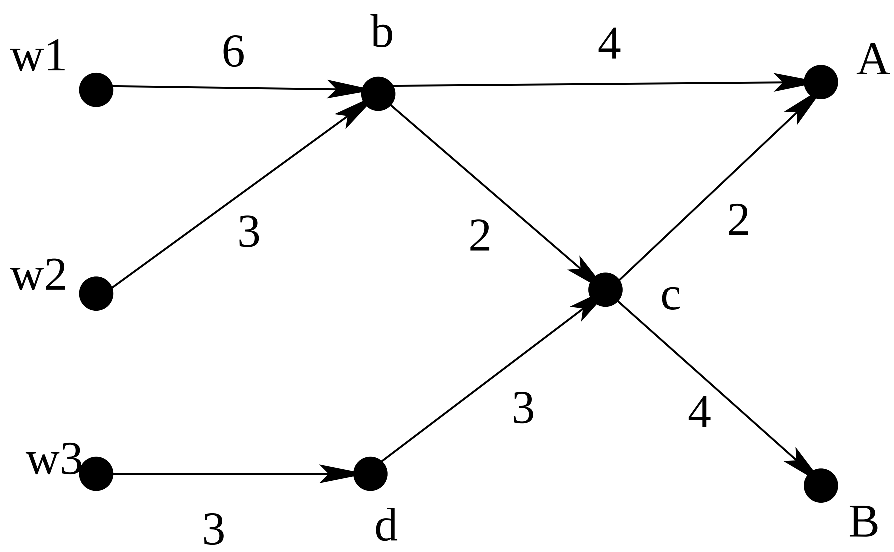
Sự bảo toàn trong vận chuyển

$$\sum_i F_{ai} = \sum_i F_{iz}$$

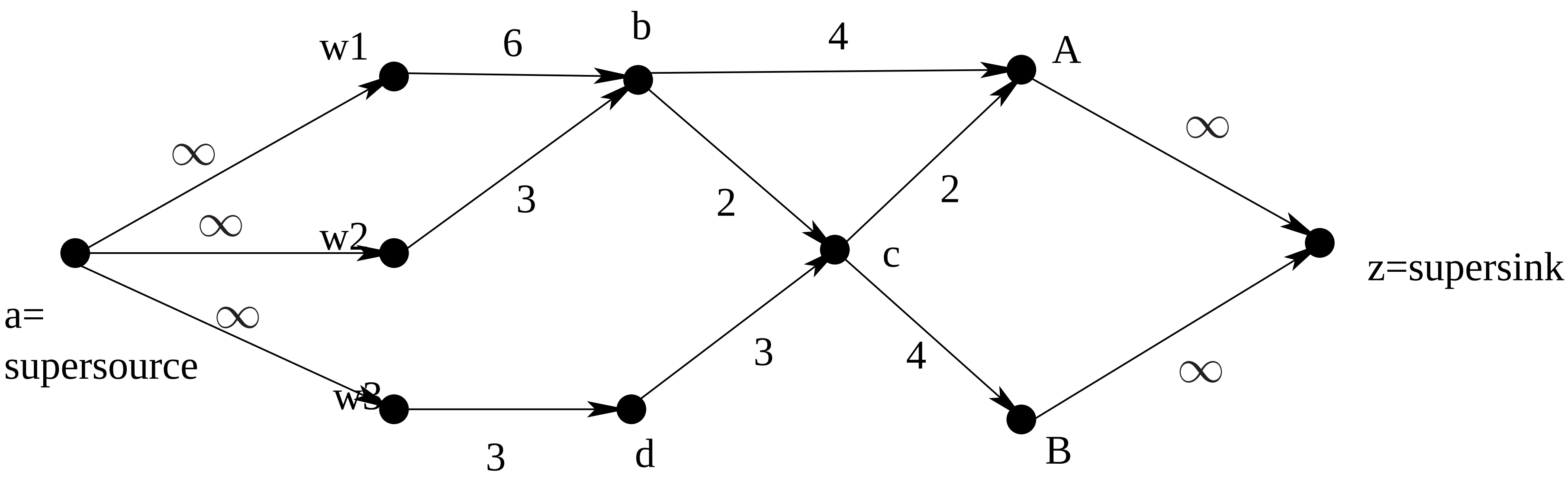
$\sum_i F_{ai}$ **được gọi là giá trị của dòng** F

Ví dụ: **Giá trị của dòng** F **trong hình là 5**

Cách mô hình bài toán nhiều nguồn

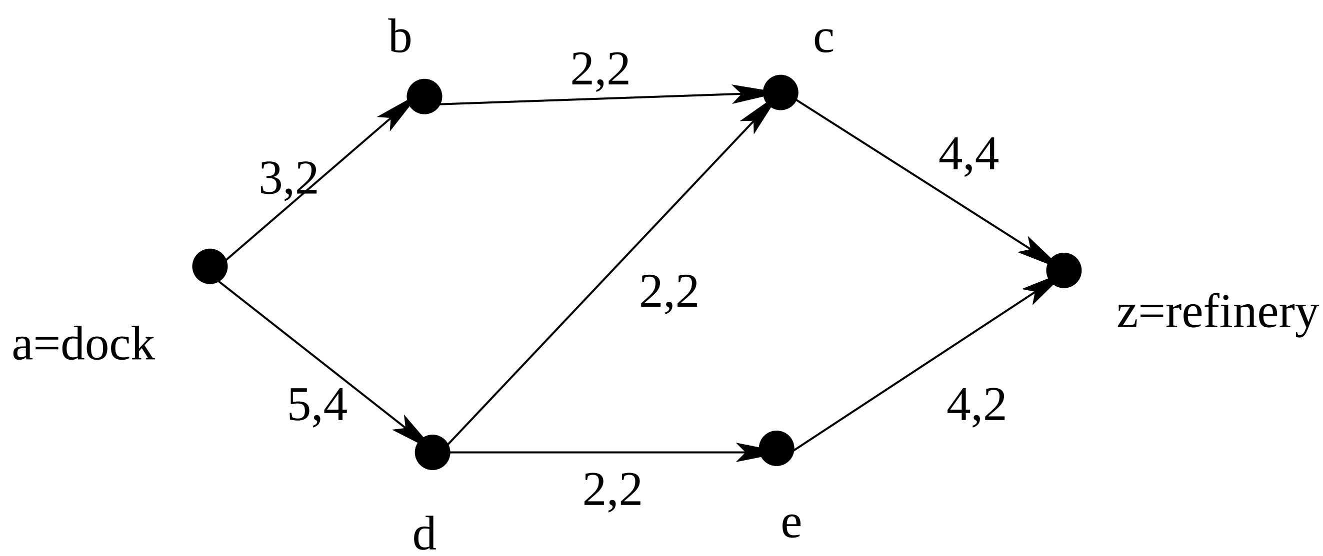


- Mô hình một mạng bơm nước có 3 giếng về 2 thành phố.
- Mạng trên không được gọi là mạng vận chuyển vì có nhiều nguồn
- Dùng mô hình sau để có được 1 mạng vận chuyển.


w1
6
b
4
A
∞
3
2
2
∞
w2
c
z=supersink
a=
supersource
∞
3
4
∞
w3
3
d
B

Thuật toán tìm dòng lớn nhất

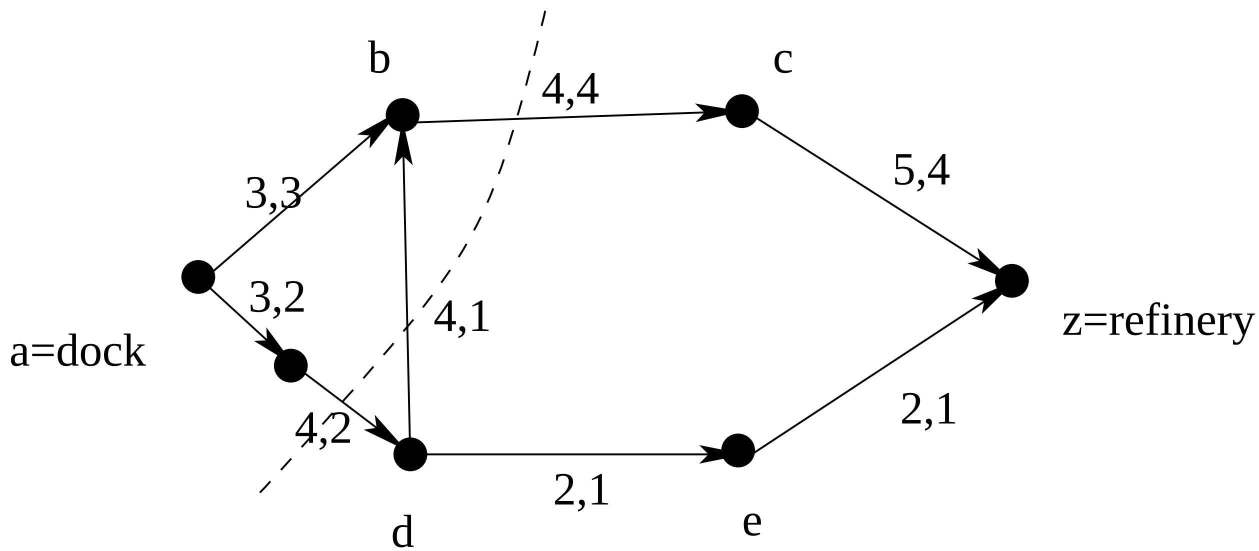
Cho một mạng vận chuyển G, dòng lớn nhất trong G là có giá trị dòng lớn nhất.



Dùng phương pháp cải thiện dần để xây dựng dòng cực đại

Dòng cực đại, nhát cắt tối thiểu

Một cắt (cut) ký hiệu là $(P, \overline{P})$ trong đó P là một tập con các đỉnh của G và $\overline{P}$ là phần bù, với $a \in P$ và $z \in \overline{P}$.



Dung lượng của một cắt $(P, \overline{P})$ là

$$C(P, \overline{P}) = \sum_{i \in P} \sum_{j \in \overline{P}} C_{ij}$$

Ví dụ: **Cắt trong hình có dung lượng là**

$$C_{bc} + C_{de} = 8$$

Định lý

Cho F là 1 dòng trong G và $(P, \overline{P})$ là 1 cắt trong G. Khi đó

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in \overline{P}} C_{ij} \geq \sum_{i} F_{ai}$$

Định lý dòng cực đại, cắt tối thiểu

Cho F **là 1 dòng trong** G **và** $(P, \overline{P})$ **là 1 cắt trong** G**. Khi đó dấu bằng xảy ra khi dòng cực đại và cắt tối thiểu. Cách biểu diễn khác dấu bằng khi và chỉ khi**

a) $F_{ij} = C_{ij}$ **với** $i \in P$ **và** $j \in \overline{P}$**.**

- $F_{ij} = 0$ **với** $i \in \overline{P}, j \in P$